Solution 2 :

1°/ Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$Z = z^2 + z - \overline{z} = (x + yi)^2 + x + yi - (x - yi) = x^2 - y^2 + i(2xy + 2y)$

$= x^2 - y^2 + i2y(x + 1)$

$$Z = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ et \\ 2y(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ ou \ x = -y \\ et \\ y(x+1) = 1 \end{cases}$$

• 1^{er} cas : $\begin{cases} x = y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x+1) = 1 \end{cases}$

* $x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$; $\Delta = 5$;

$x' = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x'' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

D'où $z = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(1 + i)$ ou $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(1 + i)$

• $2^{ème}$ cas : $\begin{cases} x = -y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x(x+1) = 1 \end{cases}$

* $-x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$;

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ impossible car $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : les complexes z sont : $-(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})(1+i)$ ou $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$

2°/

a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1$

D'où l'ensemble (E_1) est la réunion des deux droites $D_1 : y = 0$ et $D_2 : x = -1$; $E_1 = D_1 \cup D_2$

b) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re e(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Soit $\Delta_1 : x - y = 0$ et $\Delta_2 : x + y = 0$. D'où l'ensemble $(E_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$.